Klasszikus ládapakolási algoritmusokra vonatkozó éles eredmények

Habilitációs tézisek

Dósa György

Informatikai Tudományok Doktori Iskola
Matematika Tanszék

Műszaki Informatikai Kar
Pannon Egyetem
Veszprém

2018

1 Ládapakolási algoritmusok

A Ládapakolás (angolul bin packing, röviden: BP) a Kombinatorikus Optimalizálás területéhez tartozik. A feladat a következő: Adott n számú tárgy, ezek méretei a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ pozitív, 0 és 1 közötti racionális számok. Azt keressük, hogy ezen tárgyakat hogyan lehet a lehető legkevesebb ládába pakolni úgy, hogy bármely ládába legfeljebb 1 összméretű tárgy pakolható. Az egy ládába pakolt tárgyak összméretét szintnek (level) nevezzük. Közismert hogy a feladat NP-nehéz ([7, 27]). Más kombinatorikus optimalizálási feladatokhoz hasonlóan, a BP-nek is két fő területét különböztethetjük meg, nevezetesen az *offline* és *online* eseteket. Offline esetben valamely algoritmus alkalmazása előtt már minden szükséges információ rendelkezésünkre áll az inputról, míg az online esetben a tárgyak egyenként érkeznek, és minden tárgy pakolását úgy a később érkező tárgyak ismerete nélkül kell elvégeznünk. Mi most csak az offline esettel foglalkozunk.

A ládapakolás a korai hetvenes években "született", nagyjelentőségű e szempontból D.S. Johnson [32] doktori disszertációja (valamint egyéb korai munkák). Johnson dolgozata alapvető eredményeket közöl bizonyos "Fit típusú" algoritmusokkal kapcsolatban (mint például a First Fit (FF), Best Fit (BF), és más algoritmusok). A FF algoritmus a következő: A tárgyakat egy adott L lista szerinti sorrendben pakolja el. A soron következő tárgy mindig a legelső ládába kerül, ahova befér. Ha semelyik ládába nem fér be, akkor egy új ládát "nyit", és oda pakolja a tárgyat. (A ládák a nyitásuk szerinti sorrend szerint vannak rendezve.) Amennyiben az L listában a tárgyak a méreteik szerinti csökkenő sorrendben érkeznek, az FF algoritmust First Fit Decreasing (FFD) algoritmusnak hívjuk. A Best Fit (BF) algoritmus esetén szintén adott sorrend szerint pakoljuk a tárgyakat, a következő tárgy abba a ládába kerül (ahova befér, és) ahol a láda szintje a lehető legnagyobb lesz a tárgy pakolása után. Ha nincs ilyen láda, új ládába kerül a tárgy. Sok egyéb algoritmus is van (lásd pl. [7]), de most csak az ismertetett FF és BF algoritmussal, illetve FF bizonyos változataival foglalkozunk. A BP feladat *paraméteres* változatában a tárgyak méretére az erősebb $0 < p_i \leq 1/d$ feltétel teljesül minden $i \in \{1, ..., n\}$ index esetén, valamely adott $d \geq 1$ egész számra. Továbbá, a "*Cardinality Constrained Bin Packing* ($CCBP$), magyarul *elemszámkorlátos* ládapakolási feladat esetén adott egy k paraméter (amely pozitív egész szám), és azon felül hogy minden láda szintje legfeljebb 1, annak is teljesülnie kell hogy bármely láda legfeljebb k darab tárgyat tartalmaz.

Az algoritmusok hatékonyságát általában az *approximációs aránnyal* mérjük. Ennek két változata van, az aszimptotikus és az abszolút approximációs arányok. Ezeket a következőképpen definiáljuk. Legyen L a pakolandó tárgyak halmaza (rendezett esetben *listája*). Jelöljön OPT egy optimális algoritmust, A pedig egy tetszőleges algoritmust. (Nyilvánvaló, hogy mivel véges sok tárgy van, ezek véges sokféleképpen pakolhatóak, emiatt optimális pakolás, és ezáltal optimális algoritmus mindenképpen van, legfeljebb nehezen tudjuk azt meghatározni.) Jelölje $OPT(L)$ illetve $A(L)$ az algoritmusok által felhasznált ládák számát, miután az L lista tárgyait elpakolták. Ekkor

$$R_{abs}(A) = \sup_L \{A(L)/OPT(L)\},$$

az A algoritmus abszolút approximációs aránya, míg

$$R_{as}(A) = \lim_{n\to\infty} \sup_L \{A(L)/OPT(L) \mid OPT(L) \geq n\}$$

az aszimptotikus approximációs arány. Korán kiderült, hogy az aszimptotikus arány sok esetben viszonylag könnyen meghatározható. Már Ullman [41] korai munkája tartalmazza az $R_{as}(FF) \leq 1.7$

felső becslést, az élesség bizonyítása (vagyis $R_{as}(FF) \geq 1.7$) pedig a Garey és társai [29] valamint Johnson és társai [34] által írott cikkekben található. Ezen eredmények az elsők között voltak, amelyeket approximációs algoritmusokkal kapcsolatban (nemcsak a BP hanem egyáltalán az optimalizálás területén) közöltek. Az FF algoritmus abszolút approximációs aránya pontos értékének meghatározása viszont lényegesen nehezebb, és azóta nyitott kérdés volt. Az ezzel kapcsolatos első eredmény Simchi-Levy [40] 1994-es dolgozata tartalmazza, miszerint $R_{abs}(FF) \leq 1.75$ (ugyanez a felső becslés BF-re is áll). Dósa és Sgall 2013-as és 2014-es [16, 17] cikkeiben kapjuk meg a választ az abszolút approximációs arnyának pontos értékére vonatkozó kérdésre, miszerint $R_{abs}(FF) = R_{abs}(BF) = 1.7$.

Az FFD algoritmussal kapcsolatban Johnson 1973-as doktori dolgozatában [32] belátta, hogy $FFD(L) \leq 11/9 \cdot OPT(L) + 4$ teljesül tetszőleges L lista esetén. Szintén belátta hogy az aszimptotikus szorzó, vagyis 11/9 értéke "éles", nem csökkenthető. Az additív tag (vagyis az előbbi 4-es) csökkentésére azóta több próbálkozás történt, a lehető legkisebb értékének meghatározása Dósa [13] cikkében illetve Dósa és társai [14] cikkében szerepel: $FFD(L) \leq 11/9 \cdot OPT(L) + 6/9$. Ez tisztázza az abszolút approximációs arány kérdését is, mint később ezt ismertetjük. Az FF algoritmus paraméteres változata esetén (ahol $p_i \leq 1/d$) az aszimptotikus arány éles értéke szerepel már Johnson [32] dolgozatában, eszerint $R_{as}(FF_d) = \frac{d+1}{d}$, ha $d > 1$. Az abszolút approximációs arányát viszont csak a közelmúltban sikerült meghatározni, tetszőleges d esetére, Dósa [18] cikkében. Ezután foglalkozunk az FF algoritmusnak az elemszámkorlátos változatával. Az első eredményeket tartalmazó cikk ([36]) 1975-ben jelent meg. Az algoritmus aszimptotikus aránya pontos értékének meghatározása (a $k = 2$ eset kivételével) azóta nyitott volt. Ezt a kérdést válaszolja meg Dósa és Epstein tetszőleges $k \geq 3$ esetén a [19, 20] cikkekben. A dolgozat végén két olyan modellel foglalkozunk (kötegelt ládapakolási feladat, és gráf-láda pakolási feladat), ahol FFD segédalgoritmusként szerepel. Az optimalizálás területén ez egy bevett dolog, hogy valamely újonnan felmerült feladat esetén megpróbáljuk a "régi, bevált" algoritmusokat alkalmazni.

A BP területe rendkívül színes és szerteágazó, a fentiekben csak a dolgozat eredményeihez szorosan kapcsolódó vonatkozásokat ismertettük, továbbiak találhatók például a következő munkákban: [7, 8, 9, 10, 11, 12, 21, 42].

Végül néhány szó a bizonyításokról. A felső korlátok bizonyításához majdnem minden esetben úgynevezett súlyfüggvényeket használunk. Ez egy régi bevált módszer, már az FF algoritmus aszimptotikus arányának bizonyítása is súlyfüggvény segítségével történhet, lásd [33, 7]. Megjegyezzük azonban, hogy az alkalmazott súlyfüggvényekben mindig van valami újdonság a korábbiakhoz képest, helyenként egészen "ravasz" módon kell őket definiálni és alkalmazni, ezáltal vagyunk képesek az éles eredmények elérésére. A Tézisfüzetben igyekszünk bemutatni ezeknek a súlyfüggvények a használatát is. Az alsó korlátok bizonyításához pedig új konstrukciókat kellett alkalmazni, vagyis olyan "kellemetlen" listát találni, amelyet a vizsgált algoritmus nem képes "jól" pakolni, néhány ilyen új konstrukciót is bemutatunk.

A tézisfüzet szerkezete: Ebben a fejezetben egy rövid általános ismertetőt adtunk a ládapakolási feladatokkal, és megoldó algoritmusokkal kapcsolatban. A következő (2.-6.) fejezetek mindegyike egy-egy tézispontnak felel meg. Ezután a 7. fejezetben összefoglaljuk a tézisekben szereplő eredményeket. Legvégül található a hivatkozások listája. A tézis a szerzőnek a következő 12 publikációján alapul:

[4, 5, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 43].

2 Az FFD algoritmus éles becslése

Az FFD algoritmus az FF algoritmus rendezett változata: rendezzük a tárgyakat méreteik szerinti monoton csökkenő sorrendbe, és utánna alkalmazzuk az FF algoritmust (vagyis a soron következő tárgy az első ládába kerül ahova befér). Valamely L input esetén jelentse $FFD(L)$ illetve $OPT(L)$ az FFD illetve egy optimális algoritmus által kapott ládaszámot. Azt keressük, hogy az alábbi egyenlőtlenségben:

$$FFD(L) \leq 11/9 \cdot OPT(L) + C$$

melyik az a legkisebb konstans, amelyik a C helyére írható, úgy hogy az egyenlőtlenség tetszőleges L input esetén igaz legyen. A 11/9 aszimptotikus együttható a lehető legkisebb, ezt már Johnson PhD munkája tartamazza. Azonban az additív konstans legkisebb értékére vonatkozó kérdés azóta nyitott volt. Johnson dolgozatában C értéke 4. Bő tíz évvel később Baker [3] közölt egy némileg rövidebb bizonyítást, ahol $C \leq 3$. Később 1991-ben Yue [45] belátta hogy $C \leq 1$; valamint 2000-ben Li és Yue [38] közölt egy vázlatot arról hogy az additív konstans legfeljebb 7/9, sejtésük szerint a pontos érték 5/9. Azonban Dósa [13] megmutatta hogy a C konstans nem lehet kisebb mint 6/9, és ez tetszőlegesen nagy inputra is igaz. Továbbá állítja hogy ez a 6/9 a lehető legkisebb konstans. A [13] dolgozat egy konferenciakiadvány. Itt a bizonyítás két fő részre van osztva. Az egyik esetre vonatkozó bizonyítás szerepel a cikkben, valamint a másik esetre ad egy vázlatot. A teljes bizonyítás Dósa és társai [14] cikkében szerepel. Valójában ez egy teljesen új bizonyítás: az első esetben egy ügyes trükk segítségével a tárgyak nem 6 osztályba lettek sorolva mint a [13] cikk esetén hanem 5 osztályba. Ezáltal ennek az esetnek a bizonyítása más: némileg egyszerűbb és rövidebb is. Szintén új osztályozás van megadva a másik nagy esetre is, és szerepel itt az erre az esetre vonatkozó bizonyítás.

A [14] cikk valójában sokkal többet bizonyít, mint a fenti tétel, hiszen tetszőleges m egész esetén megadja azt a lehető legnagyobb k számot, amelyekre van olyan L input, hogy $OPT(L) = m$ és $FFD(L) = k$. A kérdés triviális ha $OPT(L) = 1$, ekkor $FFD(L) = 1$. Ha $OPT(L) = 2$, akkor a legrosszabb esetben $FFD(L) = 3$. Kicsivel nagyobb optimumérték esetén azonban a kérdés korántsem egyszerű. Már $m = 5$ esetén annak a kérdésnek az eldöntése hogy van-e olyan L input amelyre $OPT(L) = 5$ és $FFD(L) = 7$, a 2007-es [43] cikk megjelenéséig nyitott volt (egyébként nincs ilyen). Az alábbi tételben megadjuk a választ a fenti kérdésre.

1. Tétel. *Legyen L tetszőleges input, valamint legyen $OPT(L) = 9n + i$, ahol n egész és $2 \leq i \leq 10$. Ekkor*

$$FFD(L) \leq \begin{cases} 11n + i + 1, & 2 \leq i \leq 5; \\ 11n + i + 2, & 6 \leq i \leq 10; \end{cases}$$

vagy ekvivalens módon:

$$FFD(L) \leq \lfloor 11/9 \cdot OPT(L) + 6/9 \rfloor. \tag{1}$$

és a korlát minden n és i értékre éles.

Hangsúlyozzuk hogy az előbbi táblázatnak korábban csak egy-két értéke volt ismert, egészen a [13] illetve [14] cikkek megjelenéséig. (A maradékosztályok azért szerepelnek egy kissé szokatlan módon, mert így a táblázat egy kicsivel egyszerűbb.) Csak $n = 0$ és $i = 1$ maradt ki a táblázatból, ekkor $OPT(L) = FFD(L) = 1$.

A felső korlát bizonyítása. Ha a legkisebb (X-szel jelölt) tárgy mérete legfeljebb 2/11, vagy ha legalább 1/4, akkor elemi módon elvégezhető a bizonyítás. A maradék eseteket két fő esetre

osztjuk, annak megfelelően, hogy a legkisebb tárgy mérete 1/5-nél nagyobb, vagy legfeljebb ekkora.

Az egyik nagy eset: $1/5 < X < 1/4$. A tárgyakat osztályokba soroljuk. Legyen Z a legkisebb reguláris tárgy az $(\frac{1-X}{3}, \frac{1}{3}]$ intervallumból (vagyis olyan tárgy, amelyik nem "fallback" tárgy, vagyis más szóval, amelyik az éppen utolsó nyitott ládába kerül) ha van ilyen tárgy, egyébként legyen $Z = 1/3$. (A Z-re vonatkozó definíció itt jelentős dolog, ezáltal sikerül az osztályok számát 6 helyett 5-re lecsökkenteni. Ezáltal a lehetséges ládatípusok száma sokkal kisebb mintha 6 osztály lenne, ezáltal a bizonyítás rövidebb és némileg egyszerűbb is). Az osztályok az X és a Z értéke alapján definiálódnak. Az osztályok neve **giant, big, medium, small, és tiny**, és a kezdőbetűkkel rövidítjük őket. Minden osztály kap egy-egy súlyt is, ezek a súlyok most konstansok, az alábbiak szerint.

Név	Osztály	Súly
Giant	$\frac{1}{2} < G$	23
Big	$\frac{1-X}{2} < B \leq \frac{1}{2}$	18
Medium	$\frac{1-Z}{2} < M \leq \frac{1-X}{2}$	15
Small	$Z \leq S \leq \frac{1-Z}{2}$	12
Tiny	$X \leq T < Z$	9

A tárgyak osztályozása $1/5 < X < 1/4$ esetén

Jelölje egy A tárgy súlyát $w(A)$, az összes tárgy összsúlyát $w(L)$, valamely optimális vagy FFD láda súlyát pedig $w(B^*)$ illetve $w(B)$. Definiáljuk a következő fogalmakat:

- **reserve** (vagyis tartalék), egy optimális láda esetén ennek értéke $res(B^*) = 44 - w(B^*)$. Amikor az osztályok súlyát definiáljuk, ezt úgy tesszük, hogy semelyik optimális láda súlya ne legyen több mint 44, vagyis a tartalék minden optimális láda esetén nemnegatív.
- **surplus** (többlet), FFD ládák esetén definiáljuk. Egy FFD láda többlete a következő: $sur(B) = w(B) - 36$, ha ez az érték nemnegatív.
- **shortage** (vagyis hiány), FFD ládák esetén definiáljuk, $short(B) = 36 - w(B)$, ha ez pozitív.

Ha minden FFD láda súlya legalább 36 (vagyis nincs hiány) tudván azt is hogy minden optimális láda súlya legfeljebb 44, vagyis a tartalék nemnegatív, a következő egyenlőtlenség adódik:

$$36\,FFD(L) \leq \sum_{k=1}^{FFD(L)} w\left(B_k\right) = w(L) = \sum_{k=1}^{OPT(L)} w\left(B_k^*\right) \leq \frac{44}{36} \cdot 36\,OPT(L),$$

és a bizonyítás kész is van. Sajnos az esetek többségében bizonyos FFD ládák súlya a kellőnél kisebb, ezeken a helyeken hiány keletkezik. De szerencsére, ha vannak is ilyen ládák, olyanok is lesznek, ahol meg többlet van. Az optimális ládák tartalékjait is felhasználva, egyszerű levezetés után kapjuk, hogy az eredeti (1) állításunk azzal ekvivalens, hogy az összes hiány *lefedhető* az összes tartalékkal, valamint az összes többlettel, valamint még a 27 additív konstanssal. Ez utóbbit $rex(L)$-lel jelölve tehát ezt az egyenlőtlenséget kell bizonyítanunk:

$$res(L) + sur(L) + rex(L) \geq short(L) \tag{2}$$

Ezek után megvizsgáljuk, hogy milyen típusú ládák lehetségesek, ezek a következők:

OPT

23	G	1	1															
18	B			1	1	1	1											
15	M			1				2	1	1	1	1						
12	S	1			2	1			2	1			3	2	2	1	1	
9	T	1	2	1		1	2	1		1	3	2		2	1	3	2	4	3
	r	0	3	2	2	5	8	5	5	8	2	11	8	2	11	5	14	8	17

FFD

23	G	1	1	1	1				1	1										
18	B	1				2	1	1			1	1	1	1						
15	M		1				1				1				2	1	1	1	1	
12	S			1				1	1			2	1			2	1			
9	T				1				1	2	1		1	2	1		1	3	2	
	s	5	2	−1	−4	0	−3	−6	8	5	6	6	3	0	3	3	0	6	−3	

12	S	3	2	2	1	1		
9	T		2	1	3	2	4	1
	s	0	6	−3	3	−6	0	0

Ezek után esetszétválasztás következik, és egyesével belátjuk, hogy nincs olyan input amikor (2) nem teljesül.

A másik nagy eset: $2/11 < X \leq 1/5$. Ebben az esetben 8 osztályra van szükség, csak az OPT ládák felsorolásához kell egy teljes oldal, és szintén az FFD ládákéhoz is. Legyen Z a legkisebb reguláris tárgy az $(\frac{1-X}{4}, \frac{1}{4}]$ intervallumban, ha van ilyen tárgy, egyébként legyen $Z = 1/4$. Az osztályok és súlyok a következők:

	Név			Súly
$\frac{1}{2} <$	G			23
$\frac{1-X}{2} <$	B	$\leq$	$\frac{1}{2}$	18
$\frac{1-Z}{2} <$	C	$\leq$	$\frac{1-X}{2}$	16
$\frac{1}{3} <$	M	$\leq$	$\frac{1-Z}{2}$	14
$\frac{1-X}{3} <$	N	$\leq$	$\frac{1}{3}$	12
$\frac{1-Z}{3} <$	S	$\leq$	$\frac{1-X}{3}$	10
$Z \leq$	U	$\leq$	$\frac{1-Z}{3}$	9
$X \leq$	V	$<$	Z	8

A tárgyak osztályozása $2/11 < X \leq 1/5$ esetén

Könnyen igazolható, hogy az osztályok jól definiáltak. A tartalék (reserve), többlet (surplus) és hiány (shortage) az előbbi esethez hasonló módon defniniálható. Alább felsoroljuk az összes lehetséges ládatípust. Ezután a bizonyítás az előző esethez hasonló, kivéve hogy sokkal részletesebb vizsgálatra van szükség.

OPT

G	1	1	1	1	1	1	1
N	1	1					
S			1	1			
U	1		1		2	1	
V		1		1		1	2
r	0	1	2	3	3	4	5

B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
C	1															
M		1	1	1												
N					2	1	1	1								
S		1				1			2	1	1					
U			1				1			1		2	1		1	
V	1			1				1			1		1	2	2	3
r	2	2	3	4	2	4	5	6	6	7	8	8	9	10	1	2

C	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
M		1	1	1	1														
N		1				2	1	1	1										
S			1				1			2	1	1				1			
U				1				1			1		2	1			2	1	
V	1				1				1			1		1	2	2	1	2	3
r	4	2	4	5	6	4	6	7	8	8	9	10	10	11	12	2	2	3	4

M	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
N	1				2	1	1	1							1	1						
S		1				1			2	1	1						1	1				
U			1				1			1		2	1		1		1		3	2	1	
V				1				1			1		1	2	1	2	1	2		1	2	3
r	4	6	7	8	6	8	9	10	10	11	12	12	13	14	1	2	3	4	3	4	5	6

N	3	2	2	2	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1
S		1			2	1	1				1				2	1	1	1				
U			1			1		2	1			2	1			2	1		3	2	1	
V				1			1		1	2	1		1	2	1		1	2		1	2	3
r	8	10	11	12	12	13	14	14	15	16	2	2	3	4	4	4	5	6	5	6	7	8

S	3	2	2	1	1	1	3	2	2	2	1	1	1	1	1
U		1		2	1			2	1		3	2	1		
V			1		1	2	1		1	2		1	2	3	4
r	14	15	16	16	17	18	6	6	7	8	7	8	9	10	2

U	3	2	1	
V		1	2	3
r	17	18	19	20

4	3	2	1	
	1	2	3	4
8	9	10	11	12

3	2	1	
2	3	4	5
1	2	3	4

FFD

G	1	1	1	1	1	1	1				
B	1							2	1	1	1
C		1							1		
M			1							1	
N				1							1
S					1						
U						1					
V							1				
s	5	3	1	−1	−3	−4	−5	0	−2	−4	−6

1	1	1	1	1	1	1
1	1					
		1	1			
1		1		2	1	
	1		1		1	2
8	7	6	5	5	4	3

B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
C	1													
M		1	1	1										
N					2	1	1	1						
S		1			1			2	1	1				
U			1				1			1		2	1	
V	1			1				1			1		1	2
s	6	6	5	4	6	4	3	2	2	1	0	0	−1	−2

1	1
1	
2	3
7	6

C	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
M		1	1	1	1									
N		1				2	1	1	1					
S			1				1			2	1	1		
U				1				1			1		2	1
V	1				1				1			1		1
s	4	6	4	3	2	4	2	1	0	0	−1	−2	−2	−3

1	1	1	1
1			
	2	1	
2	1	2	3
6	6	5	4

M	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
N	1				2	1	1	1					
S		1				1			2	1	1		
U			1				1			1		2	1
V				1				1			1		1
s	4	2	1	0	2	0	−1	−2	−2	−3	−4	−4	−5

1	1	1	1	1	1	1	1
1	1						
		1	1				
1		1		3	2	1	
1	2	1	2		1	2	3
7	6	5	4	5	4	3	2

N	3	2	2	2	1	1	1
S		1			2	1	
U			1			1	2
V				1			
s	0	−2	−3	−4	−4	−5	−6

2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1
1				2	1	1	1				
	2	1			2	1		3	2	1	
1		1	2	1		1	2		1	2	3
6	6	5	4	4	4	3	2	3	2	1	0

S	3	2	2	2	1	1	1	1
U		2	1		3	2	1	
V	1		1	2		1	2	3
s	2	2	1	0	1	0	−1	−2

1
4
6

4	3	2	1
	1	2	3
0	−1	−2	−3

3	2	1		
2	3	4	5	1
7	6	5	4	−1

3 A First Fit algoritmus éles becslése

A következő eredmény a First Fit algoritmussal kapcsolatos. Emlékeztetőül: a tárgyak valamely (nem feltétlenül csökkenő) sorrendbe vannak rendezve. Ezután a tárgyakat ebben a sorrendben pakoljuk, a soron következő tárgy az első olyan ládába kerül ahova befér, ha sehova sem fér be, akkor pedig egy új ládába tesszük.

Az FF algoritmus aszimptotikus approximációs aránya 1.7, ez a korai eredmény már Ullman 1971-es [41] dolgozatában szerepel, és szintén tárgyalja ezt az eredményt [29, 34]. Az abszolút approximációs aránnyal kapcsolatban a legkorábbi becslés Ullman előbb idézett munkájából származik, miszerint $FF \leq 1.7 \cdot OPT + 3$ (az egyszerűség kedvéért elhagytuk az L input jelölésést, az egyenlőtlenséget úgy értjük, hogy az tetszőleges L input esetén teljesül, ahol FF illetve OPT jelenti az FF illetve egy optimális algoritmus által használt ládák számát). Nem sokkal később az additív tag 2-re csökkent ([29]), majd a [28] cikk belátta hogy $FF \leq \lceil 1.7 \cdot OPT \rceil$; mivel OPT illetve FF egész, ez ekvivalens a következővel: $FF \leq 1.7 \cdot OPT + 0.9$. Bő harminc évvel később az additív tag tovább csökkent a becslésben: $FF \leq 1.7 \cdot OPT + 0.7$ ([44]).

Ha elhagyjuk az additív tagot, a következő becslések szerepelnek az irodalomban: Simchi-Levy [40] 1994-es cikkében bizonyította hogy $FF \leq 1.75 \cdot OPT$. Eztán Xia és Tan [44] illetve Boyar, Dosa és Epstein [4] tovább csökkentette a szorzót $12/7 \approx 1.7143$-ra, majd Németh $101/59 \approx 1.7119$-re [39].

Az alsó korlátot illetően, korán kiderült hogy van olyan input tetszőlegesen nagy OPT esetén, amikor $FF = 1.7 \cdot OPT$ és $OPT = 10k + 1$, valamint ismert volt egy példa amelyre $FF = 17$ és $OPT = 10$, [29, 34]. (Ezen kívül a cikkek egyike megjegyzi, hogy van olyan példa amikor $FF = 34$ és $OPT = 20$, de ez már úgy tűnik sehol sem lett publikálva.)

A kérdés felvetése után 40 évvel, Dósa és Sgall [16, 17] cikkei mutatták meg hogy az FF algoritmus *abszolút* approximációs aránya pontosan 1.7. Más szóval, ha az optimális pakoláshoz OPT számú ládára van szükség, akkor FF legfeljebb $\lfloor 1.7 \cdot OPT \rfloor$ ládát használ fel. Ennél több is igaz, az előző fejezethez hasonló módon, most is sikerül tetszőleges OPT értékre megadni, hogy legfeljebb hány ládát használ FF, hiszen megadunk olyan inputokat, amelyekre az FF által felhasznált ládák száma pontosan $\lfloor 1.7 \cdot OPT \rfloor$. Korábban csak néhány kisebb OPT értékre volt ismert FF-nek pontos felső becslése. Eredményünket a következő tételben mondjuk ki pontosan:

2. Tétel. *Legyen L tetszőleges input, ekkor*

$$FF(L) \leq \lfloor 1.7 \cdot OPT \rfloor,$$

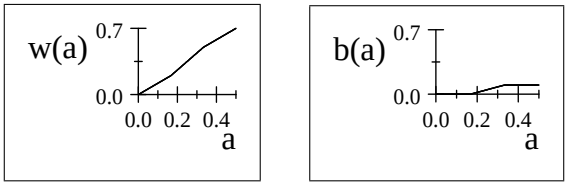
és tetszőleges OPT értékre van olyan L input, amikor a fenti egyenlőtlenségben egyenlőség szerepel, vagyis a becslés minden OPT esetén éles.

3.1 Új eszközök a felső korlát bizonyításához

A fő eszköz, az FF aszimptotikus arányának bizonyítására használt klasszikus súlyfüggvény ([7]) újszerű tárgyalása. A súlyfüggvény alább balra szerepel (ahol a tárgy mérete a, a súlya pedig $w(a)$):

$$w(a) = \begin{cases} \frac{6}{5}a & \text{ha } a \le \frac{1}{6}\,, \\ \frac{6}{5}a + \frac{3}{5}(a - \frac{1}{6}) & \text{ha } a \in \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)\,, \\ \frac{6}{5}a + 0.1 & \text{ha } a \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]\,, \\ \frac{6}{5}a + 0.4 & \text{ha } a > \frac{1}{2}\,. \end{cases} \qquad v(a) = \begin{cases} 0 & \text{ha } a \le \frac{1}{6}\,, \\ \frac{3}{5}(a - \frac{1}{6}) & \text{ha } a \in \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)\,, \\ 0.1 & \text{ha } a \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]\,, \\ 0.4 & \text{ha } a > \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Láthatjuk, hogy a súlyfüggvény értéke mindenhol legalább $\frac{6}{5}a$. Ezt e részt (amit skálázott méretnek nevezünk) leválasztva a maradék neve legyen bónusz (jelöljük $v(a)$-val). A bónusz a súlyfüggvénytől jobbra szerepel. Alább ezek grafikonjai láthatók $0 \le a \le 1/2$ esetén.



Tárgyak tetszőleges B halmazára legyen $v(B) = \sum_{a \in B} v(a)$ a bónusz összege, valamint $s(B) = \sum_{a \in B} s(a)$ az összméret. Hogy mire jó az előbbi felbontás? Kiderül, hogy tetszőleges $s(B) \le 1$ esetén (tehát olyan tárgyakra amelyek befférnek egy ládába) $w(B) \le 1.7$ nagyon könnyen bizonyítható. De ami még ennél is szerencsésebb: könnyen belátható, hogy az FF ládák összsúlya átlagosan legalább 1 (kivéve kevés számú ládát). E két (alsó és felső) becslésből aztán a kívánt állítás adódik. Az előbbi állítás az átlagos összsúlyra pontosan a következő állításban van megfogalmazva:

3. Állítás: *Legyen B, C két olyan láda az FF alkalmazása után, ahol $s(B) \ge 2/3$, C legalább két tárgyat tartalmaz, valamint B előbb lett megnyitva az algoritmus által mint C. Ekkor $\frac{6}{5}s(B) + v(C) \ge 1$.*

Vagyis a súly ezért lett szétbontva: Az egyik részét vesszük az egyik ládában (a skálázott méretet) és a másik részét a következő ládában (a bónuszt), és ezek összege legalább 1. Az összegzésből kimaradt az utolsó ládának a skálázott mérete, emiatt az előzőekből "csak" $FF \le 1.7 \cdot OPT + 0.3$ következik. Az éles becslés eléréséhez további eszközökre van szükség: A ládákat három osztályra bontjuk a ládák szintje és a ládába pakolt tárgyak darabszáma szerint, ezután kissé részletesebb vizsgálattal már $FF \le 1.7 \cdot OPT + 0.1$ adódik. Végül, az utolsó egytized eltüntetéséhez egyéb eszközöket is be kell vetni: oszthatósági feltételeket is figyelembe veszünk az OPT értékét illetően.

3.2 Új alsó korlát konstrukció

A felső korlátunk szerint már tudjuk hogy $FF \le \lfloor 1.7 \cdot OPT \rfloor$ teljesül. A korai [41, 29, 34] munkákban olyan alsó korlát konstrukció szerepel, amelyre $FF = 1.7 \cdot OPT$ és $OPT = 10k+1$, ahol k tetszőleges lehet. Az éles alsó korlátot (ami $\lfloor 1.7 \cdot OPT \rfloor$) Dósa és Sgall [16, 17] cikkei tartalmazzák.

1. a régi konstrukció kicsi módosítása. A korábbi [16] cikkben a következőt vettük észre. Az eredeti (vagyis a [29, 34] cikkekben szereplői) alsó korlát konstrukciót elég csak egy kicsit

megváltoztatni, és az optimum értékét $OPT = 10k + i$ alakba írva, a 10 maradékosztályból nyolc esetben éles alsó korlátot kapunk. A következőről van szó. Az eredeti konstrukcióban olyan L input (lista) szerepel, ahol a tárgyak három osztályból (régióból) kerülnek ki, ezek az A tárgyak, a B tárgyak és a C tárgyak. Az első régióbeli tárgyak (az A tárgyak) mérete nagyjából 1/6 (lehetnek ennél kicsivel kisebbek vagy nagyobbak is), a B tárgyak nagyjából 1/3 méretűek (kicsivel kisebbek vagy nagyobbak), és a C tárgyak mérete pontosan $1/2 + \delta$, ahol $\delta > 0$. Ezek a tárgyak ebben a sorrendben érkeznek. Ezt a listát csak egy kicsit módosítjuk, adunk néhány tárgyat a listához az első régióbeli tárgyak előtt, vagy az első és második között, vagy a második és harmadik között, vagy a lista végén. A kibővített lista legyen L'. A hozzáadott tárgyak olyanok, hogy ezek mind új ládákba kerülnek, pontosabban az L listabeli tárgyak csak L listabeli tárgyakkal kerülnek egy ládába továbbra is. Más néven, az eredeti lista egy "fekete doboz"-ként funkcionál. A módosítás után kapunk egy megfelelő L' listát, ami az alábbi tételt bizonyítja:

4. Tétel. *a, Tetszőleges $k \geq 1$ és $0 \leq i \leq 9$ esetén, van olyan I input amelyre $OPT = 10k + i$ és FF értékére az alábbi táblázat felső sorában levő becslés teljesül. (Az alsó sor az összehasonlítás kedvéért a felső korlátot tartalmazza.)*

$i =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$FF \geq 17k+$	-1	1	3	4	6	8	10	11	13	15
$FF \leq \lfloor 17k + 1.7i \rfloor = 17k+$	0	1	3	5	6	8	10	11	13	15

b, Továbbá, $i = 1, \ldots, 9$ esetére van olyan input amelyre $OPT = i$ és $FF = \lfloor 1.7 \cdot i \rfloor$.

Ezáltal a tíz maradékosztály közül 8 esetben éles korláttal rendelkezünk. Ezek a kivételek: $i = 0$ and $i = 3$. Ezekre az esetekre viszont a konstrukció (a régi konstrukció módosítása) nem működik. Emiatt egy egészen új konstrukcióval állott elő a [17] cikk.

2. Új konstrukció. Az új konstrukció egyszerűbb az eredetinél, és az éles becslést sikerül vele meghatározni minden maradékosztály esetén. Ismertetjük a konstrukció lényegét, az egyszerűség kedvéért csak $OPT = 10k$ esetére. Legyen $\varepsilon > 0$ egy kicsi racionális szám. Mint a régi konstrukció esetén, most is három régióból választjuk a tárgyakat, az A tárgyak (OPT darab) mérete nagyjából 1/6, az OPT darab B tárgy mérete nagyjából 1/3, végül jön még OPT darab $C = 1/2 + \varepsilon$ méretű tárgy. Az optimális pakolás esetén minden láda tele van, és egyet-egyet tartalmaz mindhárom típusú tárgyból.

Az FF pakolás a következő: Keletkezik $2k$ láda az A tárgyakból. Ezek között a ládák között az első ládában 6 tárgy van, az utolsóban csak 4, a többiben 5 darab tárgy. Ezután a B tárgyak párosával új ládákba kerülnek. Végül a C tárgyak mindegyike új ládába kerül, így lesz $FF = 17k$. Eddig ez hasonló a régi konstrukcióhoz, a különbség abban van, hogy *hogyan* tér el az A tárgyak mérete 1/6-tól (illetve a B tárgyak mérete 1/3-tól). Csak egy kicsi δ_i az eltérés mértéke, de a lényeg az, hogy ez az eltérés exponenciálisan csökkenő. Az A tárgyak mérete így van megadva: $1/6 - \delta_1$, $1/6 + \delta_2$, $1/6 - \delta_3$, $1/6 + \delta_4$, vagyis $A_i = 1/6 + (-1)^i \delta_i$, és az egymás utáni delták aránya nagy, pl $\delta_i/\delta_{i+1} = 10$. A legelső delta is kicsinek van választva, például $\delta_1 = 1/100$ megfelelő, akkor a legutolsó ($10k$-adik) delta még sokkal kisebb, végül az ε pedig még ennél is kisebbnek van választva. Ez a lelke a konstrukciónak, az előbbiek miatt mindig csak a legnagyobb delta mérete a meghatározó az egy tárgyba pakolt tárgyak esetében, és így az előbb leírt pakolás biztosítható (vagyis ahogy jönnek a tárgyak egyenként, tényleg az előbb leírt ládákba kerülnek (oda beférnek), de későbbi tárgy már nem kerül ezekbe a ládákba).

Kicsit részletezve a pakolás kezdetét: Az L lista elejére a hat legkisebb A tárgyat tesszük

(ezeket: $1/6-\delta_1$, $1/6-\delta_3$, ..., $1/6-\delta_{11}$), ezek az első FF ládába kerülnek, itt a tárgyak összmérete majdnem 1, ide több tárgy nem kerül. Az első régió végére a négy legnagyobb A tárgyat tesszük (vagyis ezeket: $1/6+\delta_2, ..., 1/6+\delta_8$).

Az L listának az első 6 tárgy után következő 5 tárgyát úgy válogatjuk össze az A tárgyakból, hogy ide választunk 3 tárgyat a megmaradt legkisebbek közül, és kettőt a megmaradt legnagyobbak közül. Vagyis ide kerül az $1/6+\delta_{10}$ méretű tárgy, de mivel az $1/6-\delta_1, ..., 1/6-\delta_{11}$ méretűek ekkor már el lettek pakolva (az első ládába), ezek már nem "veszélyesek" az $1/6+\delta_{10}$ méretű tárgyra nézve, vagyis a második ládában az ilyen méretű tárgyak lesznek: $1/6+\delta_{10}$, $1/6+\delta_{12}$, valamint $1/6-\delta_{13}$, $1/6-\delta_{15}$, $1/6-\delta_{17}$. Itt az összméret 5/6 fölötti, és hogy mennyivel van "fölötte", abban csak δ_{10} mérete a meghatározó. A még nem pakolt legkisebb tárgy mérete $1/6-\delta_{19}$, ez nyilván nem fog már beférni a második ládába (mert a δ_i eltérések nagysága gyorsan csökkenő), és akkor másik tárgy sem férhet már ide. A második ládába tehát megérkezett a megígért 5 darab A tárgy, és a későbbiekben más tárgy már nem kerül ide. És így tovább, a harmadik ládába is megérkezik 5 darab tárgy és továbbiak már nem férnek oda, stb. Mivel így az első régióbeli tárgyak pakolásakor kettő "nagy" és három "kicsi" tárgy megy egy-egy ládába, a kicsik hamarabb elfogynak, utánna már csak 1/6-nál nagyobb tárgyakat pakolunk. Az utolsó ládába (az első régió pakolásakor) a 4 legnagyobb A tárgy került (ezek között $1/6+\delta_2$ és $1/6+\delta_4$), ide már nem fog későbbi tárgy beférni, mert ezek legkisebbike $1/3-\delta_2-\varepsilon$ méretű. Ez nem fér be, mert $\varepsilon < \delta_{10k} << \delta_4$. Ezután a közepes méretű tárgyak kettesével lesznek pakolva, végül a legnagyobb tárgyak is mind saját (új) ládába mennek. A következő tétel adódik a konstrukció által:

5. Tétel. *Tetszőleges OPT érték esetén van olyan input, amelyre $FF = \lfloor 1.7 \cdot OPT \rfloor$.*

Ezáltal egy körülbelül 40 éve nyitott kérdésre sikerült választ találni. Ehhez új ötletekre volt szükség a felső korlát oldaláról nézve is, az alsó korlát tekintetében pedig 40 éve nem volt új, a korábbinál jobb konstrukció. Megjegyezzük, hogy FF helyett BF-et írva (vagyis a First Fit algoritmus helyett a Best Fit algoritmust véve) ugyanez az éles korlát teljesül. A BF algoritmusra vonatkozó bizonyítást a [17] cikk tartalmazza. Mivel ez a bizonyítás lényegesen bonyolultabb mint a FF algoritmusra vonatkozó, a disszertációban nem szerepel.

4 Az FF algoritmus éles abszolút aránya a paraméteres esetben

Ebben a fejezetben a *paraméteres* esettel foglalkozunk, vagyis amikor a tárgyak mérete kicsi: $p_i \leq 1/d$, ahol $d \geq 1$ valamely rögzített pozitív egész paraméter ($d = 1$ esetén az eredeti, nem-paraméteres esettel állunk szemben.) Az FF éles aszimptotikus aránya (a paraméteres esetben is) már kezdetektől ismert volt, Johnson dolgozata [32] (lásd a [34, 7] munkákat is ezzel kapcsolatban) alapján tudjuk hogy $R_{as}(FF_d) = \frac{d+1}{d}$, ha $d > 1$. Nem tudunk további eredményről, tehát az FF abszolút approximációs arányát tárgyaló cikkről sem a paraméteres esetben, egészen Dósa [18] cikkéig, amely a kérdést megválaszolja (40 év után). Valójában itt is többről van szó, mint "csak" az abszolút arány megtalálásáról: Tetszőleges OPT optimumérték esetén megállapítjuk hogy FF értéke legfeljebb mekkora lehet, erre pontos becslést adunk. Legyen $d > 1$ és $OPT \geq 1$ tetszőleges pozitív egész számok (OPT az optimális megoldás értékét jelöli). Írjuk fel az OPT számot az $OPT = k \cdot d + r$ alakban, ahol k és r egész, valamint kissé szokatlan módon $1 \leq r \leq d$. Ekkor a következő állítás érvényes:

6. Tétel. *(i), $OPT = k \cdot d + 1$ esetén az FF ládák maximális száma*

$$FF_d \leq \left\lfloor \frac{d+1}{d} OPT \right\rfloor = OPT + k,$$

(ii), $OPT = k \cdot d + r$ esetén ahol $2 \leq r \leq d$, az FF ládák maximális száma

$$FF_d \leq \left\lceil \frac{d+1}{d} OPT \right\rceil = OPT + k + 1.$$

Az alsó korlát konstrukciója: Ez a bizonyítás "lelke". Alkalmazzuk $d > 1$ esetére az FF éles alsó korlátját $d = 1$ esetén bizonyító konstrukciót, amelyet az előző fejezetben bemutattunk. A tárgyaknak háromfajta csoportját definiáljuk. Tetszőleges $1 \leq i \leq OPT$ index esetén bármely optimális ládában a következő $d + 1$ darab tárgy van:

- $d - 1$ darab az $A = 1/(d + 1) + \delta$ tárgyból
- $B_i = 1/(d + 1) - (d - 1)\delta - \varepsilon_i$, és
- $C_i = 1/(d + 1) + \varepsilon_i$,

ahol $\varepsilon_i = (\frac{1}{d})^i \cdot \varepsilon$, $\varepsilon = \frac{1}{5(d+1)}$, és $\delta = \varepsilon_{OPT}$.

A trükk megint az (mint $d = 1$ esetén) hogy az ε_i eltérések sorozata gyorsan csökkenő. A tárgyak befférnek OPT darab ládába, és meg lehet adni a tárgyak megfelelő sorrendjét, amelyre az FF a kívánt "kellőképpen rossz" pakolást készíti el.

Az éles felső korlát: Itt (egyedüliként a dolgozatban) nincs szükségünk súlyfüggvényekre, mert ezek alkalmazása nélkül is, csak a tárgyak méreteire vonatkozó összefüggések és FF elemi tulajdonságainak felhasználásával megkapjuk az éles felső korlátot.

5 Az FF algoritmus éles aszimptotikus aránya az elemszámkorlátos esetben

Emlékeztetünk arra, hogy a ládapakolási feladat elemszámkorlátos esetében (vagyis a BPCC feladatban), adott egy $k \geq 2$ paraméter, és bármely ládába az összméretre vonatkozó felső korláton túl az a feltétel is teljesül hogy legfeljebb csak k darab tárgy pakolható a ládába. A feladattal sok cikk foglalkozik, egyebek között: [36, 37, 35, 6, 1, 22, 23, 26]. Az FF algoritmus megfelelő változata most a következő: A tárgyakat valamely sorrend szerint pakolja. A következő tárgy mindig a legelső olyan ládába kerül, ahova a mérete szerint befér (a ládába került tárgyak összmérete nem fogja meghaladni az 1-et), és a láda a tárgy pakolása előtt legfeljebb $k - 1$ tárgyat tartalmaz (tehát a tárgy befér ide az elemszámkorlátot tekintve is).

Az FF -re vonatkozó első eredmény Krause, Shen és Schwetman 1975-ös [36] cikkéből származik, amelyben belátják hogy FF aszimptotikus aránya legfeljebb $2.7 - \frac{2.4}{k}$. (Vannak ennél jobb aránnyal rendelkező algoritmusok, az alábbiak szerint: $k = 2$ esetén optimális megoldás adható polinomiális idejű párosítási algoritmussal. Nagyobb k esetén ismertek legfeljebb 2 approximációs aránnyal bíró

algoritmusok, lásd [1], valamint $k = 3, 4, 5, 6$ esetén vannak ennél is (tehát $\min\{2, 2.7 - \frac{2.4}{k}\}$-nél) jobb aránnyal bíró algoritmusok, lásd [22].)

Az FF algoritmus aszimptotikus approximációs arányának pontos értékét tetszőleges $k \geq 3$ értékére, a kezdeti eredmények után körülbelül negyven évvel sikerült meghatározni, Dósa és Epstein [19] és [20] cikkeiben. Korábban csak $k = 2$ esetén volt ismert a pontos arány. A következő tétel fogalmazható meg ($k = 4$ és $k = 10$ két helyen szerepel):

7. Tétel. Az FF algoritmus aszimptotikus approximációs aránya a következő:
(i) $R_{as}(FF) = 2.5 - \frac{2}{k}$, ha $k = 2, 3, 4$,
(ii) $R_{as}(FF) = \frac{8}{3} - \frac{8}{3k}$, ha $4 \leq k \leq 10$,
(iii) $R_{as}(FF) = 2.7 - \frac{3}{k}$, ha $k \geq 10$.

5.1 A bizonyítással kapcsolatban

A bizonyítás elég összetett: Úgy tűnhet, hogy az elemszámkorlát nélküli esethez képest az éles korlát simán $\frac{k-3}{k}$-val növekszik: Az éles konstrukció esetén minden optimális ládában kicsivel csökkentjük a tárgyak méretét, és beteszünk minden ládába (ahol addig 3 tárgy volt) $k - 3$ további tárgyat. Ez valóban így van, de csak $k \geq 10$ esetén. A kicsi k számok esete viszonylag könnyű (ahol $k = 2, 3, 4$), de nehézségek adódnak ha $5 \leq k \leq 9$. A felső korlát bizonyításához ráadásul nem elég egyfajta súlyfüggvényt használni, hanem más és más súlyfüggvényre van szükségünk, és nem egy esetben ezek újfajta használatára.

5.1.1 Egyszerűbb esetek

- $k = 3$ és $k = 4$ esete

Az alábbi, egyszerű súlyfüggvény alkalmazása "elegendő" (ahol a tárgy méretét jelöljük a-val):

$$w(a) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{ha} \quad 0 < a \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2} & \text{ha} \quad \frac{1}{4} < a \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

Általában a következő módon megy a bizonyítás: összehasonlítjuk az OPT illetve FF ládák súlyát: az OPT ládák súlya legfeljeb $\frac{5}{2} - \frac{2}{k}$, míg (legfeljebb k láda kivételével) az FF ládák súlya legalább 1. E két becslésből adódik, hogy tetszőleges input esetén $FF - k \leq W \leq (\frac{5}{2} - \frac{2}{k})OPT$, ami az aszimptotikus arány éles felső korlátjának bizonyítása.

- $k = 5$ esete

Egy kicsivel bonyolultabb súlyfüggvényre van szükségünk:

$$w(a) = \begin{cases} 3/15 & \text{ha} \quad a \leq 1/6, \\ 4/15 & \text{ha} \quad 1/6 < a \leq 1/4, \\ 7/15 & \text{ha} \quad 1/4 < a \leq 1/3, \\ 8/15 & \text{ha} \quad 1/3 < a \leq 1/2. \end{cases}$$

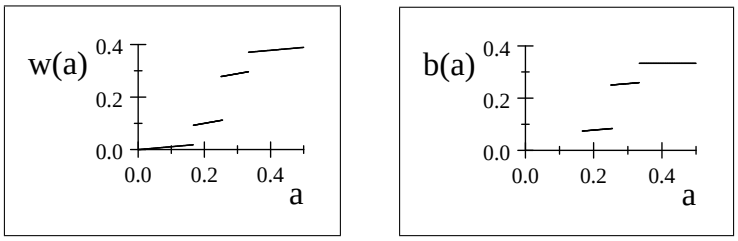
Az előbbi esetekhez hasonlóan bizonyítható, hogy tetszőleges OPT láda súlya legfeljebb 32/15, míg tetszőleges FF láda súlya (legfeljebb 6 láda kivételével) legalább 1, amiből a kívánt felső becslés adódik, vagyis $FF \leq \frac{32}{15}OPT - 6$.

5.1.2 Bonyolultabb esetek: $k = 6, 7, 8$

Kiderül, hogy $k = 6, 7, 8$ esete nehezebb. Bonyolultabb súlyfüggvényre van szükségünk, és ezt szokatlan módon kell alkalmaznunk. Az 1/2-nél nagyobb méretű tárgyak súlya 1. Az 1/2-nél nem nagyobb tárgyak $w(a)$ súlyát a következőképpen definiáljuk. A súly három részből áll. (Ilyen fajta súlyozást a korábbiakban sehol sem alkalmaztak). Az első rész az úgynevezett alapsúly (ground weight), a második rész a skálázott méret (scaled size), és a harmadik rész a bónusz (bonus). Mindegyik rész nemnegatív. Bármely tárgy alapsúlya (és ennek jelölése) legyen $g(a) = 1/k$. A skálázott méret legyen $s(a) = \frac{2(2k-11)}{3k}a$ (ami monoton növekvő, hiszen $k \geq 6$). Végezetül a bónusz legyen

$$b(a) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad a \leq 1/6, \\ \frac{2(2k-11)}{3k}a + \frac{7-k}{3k} & \text{ha} \quad 1/6 < a \leq 1/4, \\ \frac{2(2k-11)}{3k}a + \frac{10-k}{3k} & \text{ha} \quad 1/4 < a \leq 1/3, \\ \frac{2}{k} & \text{ha} \quad 1/3 < a \leq 1/2. \end{cases}$$

Bemutatjuk a súly és a bónusz grafikonját $k = 6$ esetére (a $k = 7, 8$ esetekben ezekhez hasonló).



A $b(a)$ bónusz (és emiatt a $w(a)$ súly is) most szakaszonként lineáris és monoton nemcsökkenő. Egy tárgy súlya ekkor legyen $w(a) = g(a) + s(a) + b(a)$. Ennek (szokatlan módon) szakadási pontjai vannak az 1/6, 1/4, 1/3, és 1/2 helyeken (a klasszikus BP feladat esetén, az FF-re alkalmazott súlyfüggvény csak az 1/2 helyen szakad).

A bizonyítás lépései (a súlyfüggvény alkalmazása)

1. Előbb megbecsüljük az optimális ládák súlyát, tetszőleges OPT láda esetén $w(B) \leq \frac{8(k-1)}{3k}$.

2. Következik annak belátása, hogy az FF ládák súlya legalább 1, kevés kivétellel.

a, ha 1 darab tárgy van a ládában, akkor az ilyen ládákban 1 láda kivételével olyan tárgyak vannak amelyek 1/2-nél nagyobbak, ezek súlya pedig 1.

b, Ha k darab tárgy van a ládában, csak az alapsúlyuk is 1.

Maradt az amikor $2, ..., k-1$ tárgy van a ládában, ezen eset vizsgálatát két részre osztjuk.

c, Ha a láda szintje "elég nagy", pontosabban 2-láda esetén legalább $\frac{3}{4}$, 3-láda vagy 4-láda vagy 5-láda esetén legalább $\frac{5}{6}$, akkor közvetlenül belátható, hogy a láda súlya legalább 1.

Maradtak azok a ládák, ahol a szint kisebb. Vagyis azok a ládák, amelyekre a ládában 2 tárgy van, és a szintje az $(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]$ intervallumban van, vagy a ládában 3 tárgy van és a szintje az $(\frac{3}{4}, \frac{5}{6}]$

intervallumban van, vagy a ládában 4 tárgy van és a szintje a $(\frac{4}{5}, \frac{5}{6}]$ intervallumban van. Ekkor is igaz, hogy (legfeljebb egy láda kivételével) a láda súlya legalább 1. A bizonyításban van egy kuriózum, nevezetesen a következő észrevételen alapul:

8. Állítás: *Legyen B_i és B_j két, egymás utáni láda. Ekkor*

$$g(B_i) + s(B_i) + b(B_j) \geq 1.$$

Mivel párosával alkalmazzuk a ládákra ezt a becslést, minden esetben eggyel kevesebbszer alkalmazzuk mint az ilyen ládák száma, ezért van az állításban az "egy láda kivételével".

e, végül maradtak azok a ládák, ahol a szint még kisebb: 2-láda amelynek szintje legfeljebb $\frac{2}{3}$, 3-láda amelynek szintje legfeljebb $\frac{3}{4}$, 4-láda amelynek szintje lefeljebb $\frac{4}{5}$. Azonban ezek mindegyikéből csak egy darab lehet. Továbbá minden 5 vagy több tárgyat tartalmazó láda szintje legalább 5/6, legfeljebb egy láda kivételével. Ezzel beláttuk hogy $FF - 8 \leq W \leq (8/3 - 8/(3k))OPT$, ami az éles felső korlát bizonyítása.

5.1.3 a legnehezebb eset: $k = 9$

Ez az eset nem tárgyalható együtt az előző esettel, és a későbbiekkel sem, külön figyelmet igényel.

Azon tárgyakat, amelyek az FF által k-ládába (vagyis ahol pontosan k darab tárgy van) vannak pakolva, α-típusú tárgynak vagy röviden α-tárgynak nevezzük, ezeknek a súlya $\frac{1}{k}$. A többi tárgyat "további" tárgynak nevezzük az alábbiakban. Ezután megkülönböztetjük az OPT ládákat aszerint, hogy hány további tárgyat tartalmaznak. Ha valamely láda (OPT vagy FF) nem tartalmaz további tárgyat, a súlya 1, ezekkel később nem kell foglalkoznunk. Lássuk azokat a ládákat, amelyek tartalmaznak további tárgyakat is.

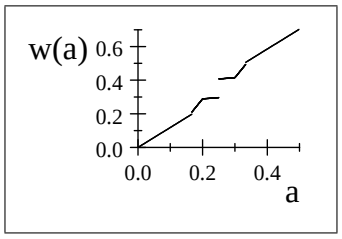
a eset, ha valamely OPT láda egy vagy kettő további tárgyat tartalmaz (és a többi tárgy benne α-tárgy). Ezen ládák neve γ-láda, és az ide pakolt további tárgyakat γ-tárgyaknak nevezzük. Ha a γ tárgy mérete 1/2 fölötti (akkor γ_1-tárgynak nevezzük és) a súlya 1. A legfeljebb 1/2 méretű γ tárgyakat pedig γ_2-tárgynak nevezzük, ezek súlya $\frac{16}{27}$.

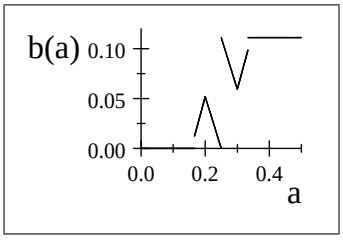
b eset, Tekintsük a másfajta OPT ládákat (amelyekben legalább három további tárgy van). Ilyen ládában legfeljebb hat α-tárgy van, az ilyen ládákat ϕ-ládának hívjuk, és az ide pakolt további tárgyakat ϕ-tárgyaknak. Ezen ϕ-tárgyak súlya bonyolultabb módon van definiálva: Ha a tárgy mérete nagyobb mint 1/2, akkor a súlya szokásos módon 1. Ha ennél kisebb a mérete, akkor a tárgy súlya $w(a) = s(a) + b(a)$, ahol $s(a) = \frac{32}{27}a$ neve skálázott méret, $b(a)$ pedig a bónusz. (Most nincs alapsúly.) A bónusz az alábbiakban van megadva.

$$b(a) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad a \leq 1/6 \\ \frac{32}{27}a - \frac{5}{27} & \text{ha} \quad 1/6 < a \leq 1/5 \\ -\frac{28}{27}a + \frac{7}{27} & \text{ha} \quad 1/5 < a \leq 1/4 \\ -\frac{28}{27}a + \frac{10}{27} & \text{ha} \quad 1/4 < a \leq 3/10 \\ \frac{32}{27}a - \frac{8}{27} & \text{ha} \quad 3/10 < a \leq 1/3 \\ \frac{1}{9} & \text{ha} \quad 1/3 < a \leq 1/2 \end{cases}$$

A bónusz szakadási helyei 1/6, 1/4, és 1/3, monoton növekvő az $(1/6, 1/5)$ valamint $(3/10, 1/3)$ intervallumokban, viszont monoton csökkenő az $(1/5, 1/4]$ illetve $(1/4, 3/10]$ intervallumon, ami

szokatlan. Viszont a súlyfüggvény ennek ellenére monoton növekvő marad az egész $0 < a \leq 1/2$ intervallumon, más szóval a bónuszfüggvény nemnegatív értékű. Alább láthatjuk a súlyfüggvényt és a bónuszt.





A bizonyítás lépései:

1. Először megmutatjuk hogy valamely optimális láda súlya legfeljebb $w(B) \leq 8/3 - 8/27 = \frac{64}{27}$.

Ezután megmutatjuk hogy az FF ládák súlya legalább 1, legfeljebb kevés kivétellel.

2. A 9-ládák súlya 1.

3. Ha a ládában van 1/2-nél nagyobb méretű tárgy (amely lehet ϕ-tárgy vagy γ_1-tárgy), akkor a láda súlya legalább 1.

4. Ha a láda szintje legalább $\frac{6}{7}$, akkor a súlya legalább 1. Legfeljebb egy 6^+-ládának (vagyis legalább 6 tárgyat tartalmazó ládának) van 6/7 alatti szintje.

Maradtak a 2-ládák, 3-ládák, 4-ládák és 5-ládák (vagyis ahol $2, ..., 5$ tárgy van).

5. Legfeljebb négy láda kivételével, ha a láda tartalmaz γ_2-tárgyat, és a ládában a tárgyak száma 2 és 5 közötti, a láda súlya legalább 1.

Ezután egy kulcs észrevétel következik:

9. Állítás: *Legyen a_1,..., a_i valahány ϕ-típusú tárgy ($2 \leq i \leq 5$), amelyekre $a_1 \leq ... \leq a_i \leq 1/2$ és $1 \geq a_1 + ... + a_i > 1 - a_1$ teljesül, ekkor a tárgyak együttes súlya legalább* 1.

6. Ennek segítségével sikerül bizonyítani, hogy a ϕ-tárgyat tartalmazó 2-ládák, 3-ládák, 4-ládák és 5-ládák súlya legalább annyi mint az ilyen ládák száma minusz 1: Az ilyen ládákat sorba tesszük, legyen B_i és B_j két egymás utáni láda, a bennük levő legkisebb tárgyak pedig i_1 és j_1. Ekkor annak a halmaznak, amely a j_1 tárgyat tartalmazza, valamint B_i tárgyait is kivéve azonban az i_1 tárgyat, a súlya legalább 1. Amit kaptunk, az az hogy $FF(L) - 7 \leq W \leq (64/27)OPT(L)$, vagyis az aszimptotikus approximációs arány $k = 9$ esetén legfeljebb 64/27.

5.1.4 a $k \geq 10$ eset

Ez az eset a dolgozat Appendix $CCBP$ részében van. Némileg egyszerűbb eset mint a $k = 9$ esete, azonban $10 \leq k \leq 20$ esetén különböző súlyfüggvényre van szükségünk. A súlyozás a következő: Az α-tárgyak súlya marad $\frac{1}{k}$.

a eset. Tekintsük azokat az OPT ládákat, ahol legfeljebb kettő további tárgy van (és ezeken kívül csak α-tárgyak). Ezek a ládák megint a γ-ládák, a bennük levő további tárgyak a γ-tárgyak. Amelyek mérete nagyobb mint 1/2, ezek a γ_1-tárgyak, súlyuk 1. A többi γ-tárgy neve γ_2-tárgy. Ezeknek súlya $10 \leq k \leq 19$ esetén $\frac{7}{10} - \frac{1}{k}$, egyébként (vagyis ha $k \geq 20$), akkor $\frac{13}{20} = 0.65$.

b eset. Tekintsük a többi OPT ládát (aholis legalább három további tárgy van). Ezekben legfeljebb $k - 3$ darab α-tárgy van, a láda neve ϕ-láda, az ilyen ládákban levő további tárgyak neve ϕ-tárgy.

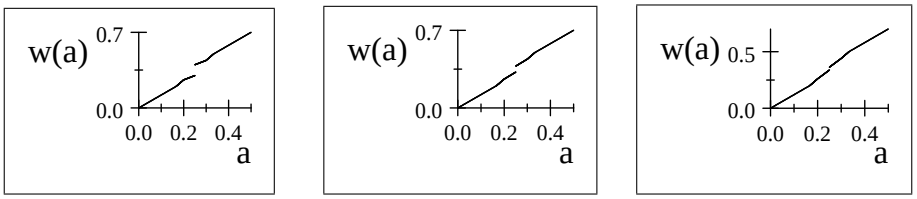
A ϕ-tárgyak súlya a következő: Ha nagyobb a mérete mint fél, akkor a tárgy súlya 1. Egyébként a ϕ-tárgy súlya $w(a) = s(a) + b(a)$ alakú, ahol $s(a) = \frac{6}{5}a$ a skálázott méret, $b(a)$ pedig a bónusz. Ha $k \geq 20$, akkor FF klasszikus súlyfüggvénye (lásd: [34]) megfelelő, ekkor a bónusz a következő

$$b(a) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad a \leq 1/6, \\ 0.6a - 0.1 & \text{ha} \quad 1/6 < a \leq 1/3, \\ 0.1 & \text{ha} \quad 1/3 < a \leq 1/2, \end{cases}$$

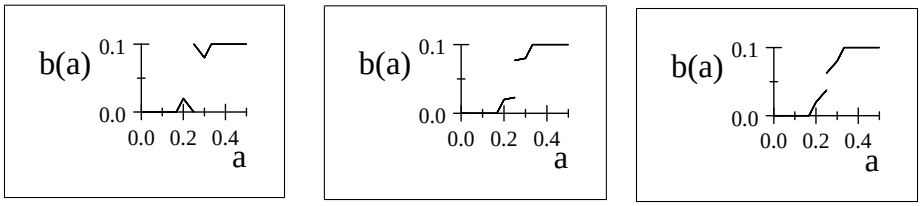
ez ugyanaz amit korábban láttunk. Viszont $10 \leq k \leq 19$ esetében muszáj bizonyos módosításokat alkalmaznunk. Érdekes módon, a súlyfüggvény ugyanaz marad mint az előbbi ha a tárgy mérete legfeljebb $1/5$, vagy legalább $3/10$. Viszont e két szám között a bónusz (és emiatt a súly) grafikonja "szétnyílik".

$$b(a) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad a \leq 1/6 \\ 0.6a - 0.1 & \text{ha} \quad 1/6 < a \leq 1/5 \\ (1.6 - \frac{20}{k})a - 0.3 + \frac{4}{k} & \text{ha} \quad 1/5 < a \leq 1/4 \\ (1.6 - \frac{20}{k})a - 0.4 + \frac{6}{k} & \text{ha} \quad 1/4 < a \leq 3/10 \\ 0.6a - 0.1 & \text{ha} \quad 3/10 < a \leq 1/3 \\ 0.1 & \text{ha} \quad 1/3 < a \leq 1/2 \end{cases}$$

Alább szemléltetés kedvéért bemutatjuk a súlyfüggvény grafikonját $k = 10$, $k = 13$ és $k = 16$ esetén:



majd a és a bónusz grafikonját $k = 10$, $k = 13$ és $k = 16$ esetén.



Látható, hogy a grafikonokban középen a "rés" $k = 10$ esetén a legnagyobb, fokozatosan összezáródik, majd $k = 20$ esetén és ettől kezdve eltűnik. A bizonyítás a $k = 9$ eset mintájára megy. Ebben az esetben a felső korlátunk így alakul: Az FF algoritmus aszimptotikus approximációs aránya $k \geq 10$ esetén legfeljebb $2.7 - 3/k$.

5.2 Az éles alsó korlát

A bizonyítás $k = 2, 3, 4$ esetén viszonylag egyszerű.

Amikor $5 \leq k \leq 10$**,** a bizonyítás (vagyis a konstrukció) nehézségét az adja, hogy háromfajta optimális ládát kell alkalmazni. Egyik típusú optimális ládában $\frac{1}{2} + \delta$, $\frac{1}{2} - 10\delta$, és $k-2$ további δ méretű tárgy van, ahol $0 < \varepsilon < \frac{1}{120}$ és $\delta < \frac{\varepsilon}{3^{\ell+4}}$, ℓ pedig egy (nagy) szám amely osztható k-val. A másik típusban a következő méretű tárgyak vannak: $\frac{1}{2} + \delta$, $\frac{1}{4} + 20\delta$, $\frac{1}{4} - 30\delta$, és $k-3$ további tárgy δ mérettel. Utoljára a harmadik típusú ládákban, ezek között is a p-edikben a következő tárgyak vannak: $\frac{1}{2} + \delta$, $\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon}{3^p}$ és $\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{3^p} - 10\delta$, valamint $k-3$ további tárgy δ mérettel. Ezeket megfelelő sorrendben adva az éles alsó korlát adódik.

A $k \geq 10$ esetben alkalmazhatjuk az elemszámkorlátozás nélküli FF algoritmus konstrukcióját, amelyet megadtunk két fejezettel korábban. Egy kicsit csökkentjük az $\frac{1}{2}+\varepsilon$ méretű tárgyak méretét, legyen a konstrukcióban levő ezen tárgyak mérete csak $\frac{1}{2} + \varepsilon/2$. Ekkor minden optimális ládában három tárgy van, és maradt még pontosan $\varepsilon/2$ szabad hely. Ide beteszünk $k-3$ darab apró tárgyat, egyenként $\frac{\varepsilon}{2k}$ mérettel. A kicsi tárgyak jönnek majd a lista elején, és így a korábbi 1.7 arány helyett ez $\frac{k-3}{k}$-val növekszik, és így a megnövelt $1.7 + \frac{k-3}{k} = 2.7 - \frac{3}{k}$ arányt kapjuk.

6 Kötegelt ládapakolás és Gráf-láda pakolás

Ebben a fejezetben a Kötegelt ládapakolási feladattal foglalkozunk (Batched Bin Packing, BBP), a fejezet eredményei Dósa [15] dolgozatából származnak. A feladat a következő: K egymás utáni kötegben (batch) érkeznek a tárgyak, egy-egy köteg tárgyai egyszerre érkeznek, és a következő köteg érkezése előtt ezeket mind el kell pakolni, ráadásul úgy, hogy nem tudunk semmit a későbbi kötegekről. A modellt Gutin és társai [30] cikke definiálta. $K = 1$ esetén ez éppen az offline pakolási feladat. Ha pedig minden köteg pontosan egy tárgyat tartalmaz, akkor meg az online ládapakolási feladattal állunk szemben (azzal az egyetlen különbséggel, hogy a kötegek száma előre adott). Ezáltal a BBP feladat valamiképpen az offline ládapakolási feladatnak is és az online feladatnak is általánosítása. Csak $K = 2$ esetével foglalkozunk. Ezen belül két változattal: az egyik változatban azokat a ládákat ahova az első köteg tárgyait pakoltuk, nem szabad használni a másik köteg tárgyainak pakolására. Ennek a változatnak a neve: diszjunktív modell, ez egy újonnan definiált modell, Dósa [15] cikkében szerepel először. A másik változat neve (ahol szabad az előbb említett ládákat használni) kiegészítő (*augmenting*) modell, ezt a modellt definiálta Gutinék cikke. Megjegyezzük, hogy az optimális pakolás esetén megengedett különböző kötegbeli tárgyak összepakolása, mindkét változatban!

A [30] cikk $K = 2$ esetében megmutatja hogy $R_{as}(A) \geq r \approx 1.3871$ alsó korlát bármely A algoritmus aszimptotikus approximációs arányára, ahol r az $r/(r-1) - 3 = \ln r/(2r-2)$ egyenlet megoldása.

A feladatot a másik oldalról közelítjük meg, megadjuk a BBP feladatra $K = 2$ esetére az *első* approximációs algoritmust. Ennek éles aszimptotikus approximációs aránya $19/12 \approx 1.5833$. Gutin és társai előbbi cikkén kívül Dósa [15] cikkéig úgy tűnik nincs más ezzel kapcsolatos publikáció. Azóta megjelent még kettő cikk a témával kapcsolatban: [2] és [25].

Kapcsolódó modellek. Ládapakolás konfliktussal (*bin packing with conflicts, BPC)*: Ez egy másfajta általánosítása a BP feladatnak: bizonyos tárgyak "konfliktusban" vannak, és nem pakol-

hatók ugyanabba a ládába (lásd [31] vagy [24]). Egy ennél általánosabb változatot *graph-bin packing* vagyis gráf-láda pakolási feladatként definiáltunk (röviden GBP) a [5] cikkünkben, ennek némileg egyszerűsített változata a következő: Adott egy gráf, alsó és felső korlátokkal az éleken, valamint súlyokkal a pontjaiban. A pontokat (amelyek tárgyaknak felelnek meg) kell minél kevesebb, egységnyi kapacitású ládákba pakolni. Bármely ládába pakolt tárgyak összmérete - szokás szerint - legfeljebb 1. Azonban további feltételek is vannak: Nevezetesen, bármely két a és b pont esetén, ha ezek éllel össze vannak kötve a gráfban, és az él alsó illetve felső korlátja l és u, akkor a és b csak olyan B_i illetve B_j ládákba pakolható, amelyek indexeire teljesül hogy $l \leq |i-j| \leq u$. (Vagyis egymáshoz se túl közel, se túl messze nem szabad ezeket pakolni.) Nyilvánvaló, hogy ez a BPC feladat általánosítása, a következő módon: legyen minden élen $u = \infty$ és $l \in \{0, 1\}$. A GBP feladat esetén a [5] cikk (egyebek mellett) megad egy approximációs algoritmust a feladat megoldására abban a seciális esetben amikor csak alsó korlátok vannak az éleken (vagyis bármely élre $u = \infty$), és a gráf páros. Az algoritmus abszolút approximációs aránya 3. Meglepő módon, a BPP feladatra adott algoritmusunk megfelelő alkalmazásával a GBP feladat ezen speciális esetére is kapunk egy javított algoritmust. A javított approximációs arány: 2.5833, abszolút értelemben véve.

6.1 A BBP feladatra vonatkozó felső korlát

Egy approximációs algoritmust definiálunk a BBP feladatra, $K = 2$ esetére. Pontosabban a következőt végezzük: Az FFD algoritmust alkalmazzuk a két köteg (batch) pakolására, egymástól függetlenül, tehát külön ládákba kerülnek a két köteg tárgyai. Előbb a B_1 tárgyait pakoljuk FFD-val, majd FFD-t alkalmazzuk a második kötegre, vagyis a B_2 kötegre (a diszjunktív modellt alkalmazzuk). Az algoritmust a következőképpen jelöljük: $FFD(B_1, B_2)$.

10. Tétel. $FFD(B_1, B_2) \leq \frac{19}{12}OPT + 2$, *ahol a* 19/12 *szorzó éles, nem csökkenthető.*

A bizonyítás alapja, hogy osztályokba csoportosítjuk a tárgyakat, majd megfelelő súlyozást választunk. Ami a súlyozás érdekessége, hogy a két kötegben levő tárgyak súlyozása nem feltétlenül ugyanaz. Alább bemutatjuk a megfelelő eseteket és a súlyozást ezekben az esetekben. A bizonyítás némileg hasonló az FFD éles bizonyításához, amelyet a 2. fejezetben mutattunk be. Legyen X az első köteg legkisebb tárgya, és Y a második köteg legkisebb tárgya. Ezek mérete szerint megy az esetek szétválasztása.

1. eset, $X \leq 1/3$ és $Y \leq 1/3$. Ekkor minden FFD bin szintje legalább 2/3, kivéve esetleg az utolsó ládákat a két kötegnél, és az állítás adódik.

2. eset, $X > 1/3$ és $Y > 1/3$. Az 1/2-nál nagyobb tárgyak súlya 1, a többi tárgy súlya 1/2, és minden egyszerűen adódik.

3. eset, $X > 1/3$ és $Y \leq 1/3$. Ez az eset viszont lényegesen nehezebb, több alesetre kell bontani, és a két köteg súlyai nem ugyanazok. Az első kötegbeli tárgyak súlya továbbra is 1 illetve 1/2, aszerint hogy a méretük félnél nagyobb vagy legfeljebb fél. Az első kötegben minden láda súlya legalább 1, legfeljebb 1 kivétellel. A második köteg súlyai pedig ezek lesznek:

3.1. eset, $1/4 < Y \leq 1/3$. Ekkor, egy B_2-tárgy (jelöljük v-vel a tárgyat és a méretét is) Z-típusú, ha optimális pakoláskor v közös ládában van egy nagy (félnél nagyobb méretű) B_1-tárggyal. A Z-tárgyak súlya 7/12. A többi $v \in B_2 \setminus Z$ tárgy súlya $w(v) = \frac{19}{12}v$. Ekkor minden optimális láda súlya legfeljebb 19/12, és minden $FFD(B_2)$ láda súlya legalább 1, legfeljebb kettő láda kivételével.

3.2. eset, $1/6 < Y \leq 1/4$. Megadjuk a B_2 tárgyak súlyait. Legyen valamely $v \in B_2$ tárgy

irreguláris, ha v valamely félnél nagyobb méretű B_1 tárggyal van együtt pakolva az optimális pakolás során. Ezeket két csoportba osztjuk. Ha v az egyedüli B_2 tárgy ebben az optimális ládában, akkor a v tárgy típusa: Z. Ellenkező esetben két irreguláris tárgy van ebben az optimális ládában, legyen ezek típusa U és V, ahol az U tárgy legalább akkora mint a V tárgy. Az előbbi három típus súlya 7/12, 1/3, illetve 1/4. Bármely további $v \in B_2 \setminus (Z \cup U \cup V)$ tárgy reguláris B_2 tárgy, ezek súlya $w(v) = \frac{19}{12}v$. Ezek után a bizonyítás hasonló az előbbi esethez, azonban jóval részletesebb vizsgálatot igényel.

3.3. eset, $1/7 < Y \leq 1/6$. Ekkor a következő osztályozást vezetjük be a B_2 tárgyak számára.

Osztály	Súly
$2/3 < J \leq 1$	1
$1/2 < I \leq 2/3$	10/12
$5/14 < H \leq 1/2$	7/12
$1/3 < G \leq 5/14$	5/12
$1/4 < F \leq 1/3$	4/12
$4/21 < E \leq 1/4$	3/12
$1/6 < D \leq 4/21$	2.5/12
$1/7 < C \leq 1/6$	2/12

Most is minden optimális láda súlya legfeljebb 19/12, kivéve az (N, M, C) alakú ládákat (ahol tehát egy N, egy M és egy C tárgy van). Azonban ha vannak ilyen ládák, kiderül hogy olyan FFD ládák is lesznek ahol meg a súly lényegesen nagyobb mint 1, és ez ellensúlyozza az előbbi ládák hiányát. Ezután hosszadalmas esetszétválasztás megy arra nézve, hogy milyen tárgyak vannak (illetve milyenek nincsenek) az FFD ládákban, felhasználva az FFD algoritmus alapvető tulajdonságait.

3.4. eset, $Y \leq 1/7$. Itt minden $v \in B_2$ súlya $w(v) = \frac{7}{6} \cdot v$, és minden viszonylag könnyen kijön.

4. eset, $X \leq 1/3$ és $Y > 1/3$. Ez az eset parallel a 3. esettel.

Mit mondhatunk a "kiegészítő" és a "megkülönböztető" (augmenting - disjunctive) modellek kapcsolatáról? Csak az FFD algoritmus viselkedését tanulmányoztuk ezen a téren, tehát hogy a két modell esetén hogyan viselkedik. Az algoritmus aszimptotikus approximációs arányát $R_a(FFD)$ illetve $R_d(FFD)$-vel jelölve a két modellben, $K = 2$ köteg esetén a következő teljesül:

11. Tétel: $R_a(FFD) = R_d(FFD)$, *ha* $K = 2$.

Vagyis az algoritmus 19/12 aránya nem javítható, ha az első kötegben levő tárgyhalmaz pakolása után ezeket a ládákat is felhasználjuk a második kötegbeli tárgyhalmaz pakolásához.

6.2 Javított algoritmus a GBP feladatra

Az algoritmus a következő: Legyen a páros gráf csúcsainak két osztálya A és B.

1. Előbb pakoljuk az A-ban levő pontokat (tárgyakat) az FFD algoritmussal ládákba. Ezután pakoljuk a B csúcshalmaz csúcsait is ládákba, megint az FFD algoritmussal, de az előbbiektől különböző ládákba, az előbbi pakolástól függetlenül. Vagyis ebben a lépésben az élekre vonatkozó alsó korlátokat figyelmen kívül hagyjuk.

2. Hagyjunk $d-1$ üres ládát a két ládahalmaz között, ahol d az élekre vonatkozó alsó korlátok maximuma.

Ekkor teljesül:

12. Tétel: *Az algoritmus abszolút approximációs aránya* $19/12 + 1 = 31/12$.

7 A tézisek összefoglalása

Ebben a fejezetben összefoglaljuk az előbbi öt tézisben szereplő eredményeket.

7.1 Első tézis

Meghatároztuk az FFD algoritmus pontos abszolút approximációs arányát. Pontosabban ennél többet bizonyítottunk: Tetszőleges m egész esetén megadtuk azt a lehető legnagyobb k számot, amelyekre van olyan L input, hogy $OPT(L) = m$ és $FFD(L) = k$. A pontos állítás a következő tételben fogalmazható meg:

1. Tétel. *Legyen L tetszőleges input, valamint legyen $OPT(L) = 9n + i$, ahol n egész és $2 \leq i \leq 10$. Ekkor*

$$FFD(L) \leq \begin{cases} 11n + i + 1, & 2 \leq i \leq 5; \\ 11n + i + 2, & 6 \leq i \leq 10; \end{cases}$$

vagy ekvivalens módon:

$$FFD(L) \leq \lfloor 11/9 \cdot OPT(L) + 6/9 \rfloor. \tag{3}$$

és a korlát minden n és i értékre éles, vagyis tetszőleges n és i esetén van olyan L input amelyre az egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül.

Hangsúlyozzuk hogy az előbbi táblázatnak korábban csak egy-két értéke volt ismert, ezáltal az körülbelül 40 év óta megoldatlan kérdést válaszoltunk meg.

7.2 Második tézis

A kérdés felvetése után 40 évvel, megmutattuk hogy az FF algoritmus *abszolút* approximációs aránya pontosan 1.7. Más szóval, ha az optimális pakoláshoz OPT számú ládára van szükség, akkor FF legfeljebb $\lfloor 1.7 \cdot OPT \rfloor$ ládát használ fel. Ennél több is igaz, az előző fejezethez hasonló módon, most is sikerül tetszőleges OPT értékre megadni, hogy legfeljebb hány ládát használ FF, hiszen megadunk olyan inputokat, amelyekre az FF által felhasznált ládák száma pontosan $\lfloor 1.7 \cdot OPT \rfloor$. Korábban csak néhány kisebb OPT értékre volt ismert FF-nek pontos felső becslése. Eredményünket a következő tétel fejezi ki pontosan:

2. Tétel. *Legyen L tetszőleges input, ekkor*

$$FF(L) \leq \lfloor 1.7 \cdot OPT \rfloor,$$

és tetszőleges OPT értékre van olyan L input, amikor a fenti egyenlőtlenségben egyenlőség szerepel, vagyis a becslés minden OPT esetén éles.

A tétel bizonyításához egyrészt a korábban használt súlyfüggvény technika újfajta kezelésére (a súlyfüggvény felbontására két részre) volt szükség, továbbá újfajta alsó korlát konstrukcióra.

7.3 Harmadik tézis

A harmadik tézispontban a *paraméteres* esettel foglalkozunk, vagyis amikor a tárgyak mérete kicsi: $p_i \leq 1/d$, ahol $d \geq 1$ valamely rögzített pozitív egész paraméter. Megadtuk az FF algoritmus éles abszolút approximációs arányát. Valójában itt is többről van szó: Tetszőleges OPT optimumérték esetén megállapítjuk hogy FF értéke legfeljebb mekkora lehet, erre pontos becslést adunk. Legyen $d > 1$ és $OPT \geq 1$ tetszőleges pozitív egész számok. Írjuk fel az OPT számot az $OPT = k \cdot d + r$ alakban, ahol k és r egész, valamint $1 \leq r \leq d$. Ekkor a következő állítások érvényesek:

6. Tétel. *(i), $OPT = k \cdot d + 1$ esetén az FF ládák maximális száma*

$$FF_d \leq \left\lfloor \frac{d+1}{d} OPT \right\rfloor = OPT + k,$$

(ii), $OPT = k \cdot d + r$ esetén ahol $2 \leq r \leq d$, az FF ládák maximális száma

$$FF_d \leq \left\lceil \frac{d+1}{d} OPT \right\rceil = OPT + k + 1.$$

Ezáltal szintén egy körülbelül 40 éve megoldatlan feladatot oldottunk meg.

7.4 Negyedik tézis

A kezdeti eredmények után körülbelül negyven évvel, meghatároztuk az FF algoritmus aszimptotikus approximációs arányának pontos értékét tetszőleges $k \geq 3$ értékére. Korábban csak $k = 2$ esetén volt ismert a pontos arány. A pontos állítás a következő tételben szerepel:

7. Tétel. Az FF algoritmus aszimptotikus approximációs aránya a következő:
(i) $R_{as}(FF) = 2.5 - \frac{2}{k}$, ha $k = 2, 3, 4$,
(ii) $R_{as}(FF) = \frac{8}{3} - \frac{8}{3k}$, ha $4 \leq k \leq 10$,
(iii) $R_{as}(FF) = 2.7 - \frac{3}{k}$, ha $k \geq 10$.

7.5 Ötödik tézis

Ebben a tézispontban a kötegelt ládapakolási feladattal foglalkozunk (Batched Bin Packing, BBP). Ez azt jelenti, hogy K egymás utáni kötegben (batch) érkeznek a tárgyak, egy-egy köteg tárgyai egyszerre érkeznek, és a következő köteg érkezése előtt ezeket mind el kell pakolni, ráadásul úgy, hogy nem tudunk semmit a későbbi kötegekről. Csak $K = 2$ esetével foglalkozunk. Megadtuk a feladatra az *első* approximációs algoritmust. Ennek éles aszimptotikus approximációs aránya $19/12 \approx 1.5833$. Az algoritmust a következőképpen jelöljük: $FFD(B_1, B_2)$.Az állítás pontos megfogalmazása a következő:

10. Tétel. $FFD(B_1, B_2) \leq \frac{19}{12} OPT + 2$, *ahol a* $19/12$ *szorzó éles, nem csökkenthető.*

Továbbá foglalkoztunk még ebben a tézispontban a *graph-bin packing* (GBP) vagyis gráf-láda pakolási feladattal. Ennek némileg egyszerűsített változata a következő: Adott egy gráf, alsó és felső korlátokkal az éleken, valamint súlyokkal a pontjaiban. A pontokat (amelyek tárgyaknak felelnek meg) kell minél kevesebb, egységnyi kapacitású ládákba pakolni. Bármely ládába pakolt tárgyak összmérete - szokás szerint - legfeljebb 1. Azonban további feltételek is vannak: Nevezetesen,

bármely két a és b pont esetén, ha ezek éllel össze vannak kötve a gráfban, és az él alsó illetve felső korlátja l és u, akkor a és b csak olyan B_i illetve B_j ládákba pakolható, amelyek indexeire teljesül hogy $l \leq |i - j| \leq u$. (Vagyis egymáshoz se túl közel, se túl messze nem szabad ezeket pakolni.) Meglepő módon, a BPP feladatra adott algoritmusunk megfelelő alkalmazásával a GBP feladat ezen speciális esetére is kapunk egy javított algoritmust. Az algoritmus abszolút approximációs aránya 2.5833, ami a jelenlegi legjobb eredmény erre a feladatra.

References

[1] L. Babel, B. Chen, H. Kellerer, and V. Kotov. Algorithms for on-line bin-packing problems with cardinality constraints, *Discrete Applied Mathematics*, 143(1-3):238–251, 2004.

[2] J. Balogh, J. Békési, G. Galambos, G. Dosa, Z. Tan, Lower Bound for 3-Batched Bin Packing, Discrete Optimization 21, 14-24, 2016.

[3] B.S. Baker, A new proof for the first-fit decreasing bin-packing algorithm, *J. Algorithms*, 6(1), 49–70, 1985.

[4] J. Boyar, G. Dosa, and L. Epstein. On the absolute approximation ratio for First Fit and related results. *Discrete Applied Mathematics*, 160, 1914-1923, 2012.

[5] Cs. Bujtas, Gy. Dosa, Cs. Imreh, J. Nagy-György, Zs. Tuza, The Graph-Bin Packing Problem, *International Journal of Foundations of Computer Science*, 22(8), 1971-1993, 2011.

[6] A. Caprara, H. Kellerer, and U. Pferschy. Approximation schemes for ordered vector packing problems, *Naval Research Logistics*, 50(1), 58–69, 2003.

[7] E.G. Coffmann, M.R. Garey, D.S. Johnson, Approximation algorithms for bin packing: A survey. In: D. Hochbaum (Ed.), *Approximation algorithms for NP-hard problems*, PWS Publishing, Boston, 1997.

[8] E. G. Coffman, Jr., J. Csirik, G. Galambos, S. Martello, D. Vigo, Bin Packing Approximation Algorithms: Survey and Classification, *Handbook of Combinatorial Optimization*, Reference Work Entry, pp 455-531, Springer New York, (2013)

[9] J. Csirik and G.J. Woeginger. Online packing and covering problems. In A. Fiat and G.J. Woeginger, editors, Online Algorithms: The State of the Art, Springer-Verlag, Berlin, *Lecture Notes in Computer Science*, 1442, 154-177, 1998.

[10] E.G. Coffman, Jr. and J. Csirik. Performance guarantees for one-dimensional bin packing. In T. Gonzales, editor, *Handbook of Approximation Algorithms and Metaheuristics*, Chapter 32, pages, 32-1-32-18. Taylor and Francis Books (CRC Press), 2006.

[11] E.G. Coffman, Jr., J. Csirik, and J.Y-T. Leung. Variants of classical one-dimensional bin packing. In T. Gonzales, editor, *Handbook of Approximation Algorithms and Metaheuristics*, Chapter 33, pages 33-1-33-13. Taylor and Francis Books (CRC Press), 2006.

[12] E.G. Coffman, Jr., J. Csirik, and J.Y-T. Leung. Variable-sized bin packing and bin covering. In T. Gonzales, editor, *Handbook of Approximation Algorithms and Metaheuristics*, Chapter 34, pages 34-1-34-11. Taylor and Francis Books (CRC Press), 2006.

[13] G. Dosa, The tight bound of First Fit Decreasing bin-packing algorithm is $FFD(I) \leq 11/9 \leq OPT(I) + 6/9$, In Proc. 1st International Symp. on Combinatorics, Algorithms, Probabilistic and Experimental Methodologies (ESCAPE), *Lecture Notes in Computer Sciences*, 4614, 1–11, 2007.

[14] G. Dosa, R. Li, X. Han, Zs. Tuza, Tight absolute bound for First Fit Decreasing bin-packing: $FFD(L) \leq 11/9 \cdot OPT(L) + 6/9$, *Theoretical Computer Science*, 510, 13-61, 2013.

[15] G. Dosa, Batched bin packing revisited, *Journal of Scheduling* 20(2), 199-209, 2017.

[16] G. Dosa and J. Sgall, First Fit bin packing: A tight analysis. In Proc. of the 30th Ann. Symp. on Theor. Aspects of Comput. Sci. (STACS2013), LIPIcs 3, 538-549. Schloss Dagstuhl, 2013.

[17] G Dosa and J. Sgall, Optimal analysis of Best Fit bin packing, J. Esparza et al. (Eds.): ICALP 2014, Part I, Springer, Heidelberg, *Lecture Notes in Computer Sciences*, 8572, 429-441, 2014.

[18] G. Dosa, The tight absolute bound of First Fit in the parameterized case, *Theoretical Computer Science*, 596, 149–154, 2015.

[19] G. Dosa, L. Epstein, The tight asymptotic approximation ratio of First Fit for bin packing with cardinality constraints, *Journal of Computer and System Sciences*, under minor revision, 2016

[20] G. Dosa, L. Epstein, Online bin packing with cardinality constraints revisited, arXiv:1404.1056 [cs.DS]

[21] G. Dosa, First Fit Algorithm for Bin Packing, (book chapter), in: *Encyclopedia of Algorithms*, Springer, 2015.

[22] L. Epstein. Online bin packing with cardinality constraints, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 20(4), 1015-1030, 2006.

[23] L. Epstein and A. Levin. AFPTAS results for common variants of bin packing: A new method for handling the small items, *SIAM Journal on Optimization*, 20(6), 3121-3145, 2010.

[24] L. Epstein, A. Levin, On bin packing with conflicts, *SIAM Journal on Optimization*, 19(3), 1270–1298, 2008.

[25] L. Epstein, More on batched bin packing, Operations Research Letters 2, 273-277, 2016.

[26] H. Fujiwara and K. Kobayashi. Improved lower bounds for the online bin packing problem with cardinality constraints, *Journal of Combinatorial Optimization*, 29(1), 67-87, 2015.

[27] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computer and Intractability: A Guide to the theory of NP-Completeness*, New York, Freeman, 1979.

[28] M. R. Garey, R. L. Graham, D. S. Johnson, and A. C.-C. Yao, Resource constrained scheduling as generalized bin packing. *J. Combin. Theory Ser. A*, 21, 257-298, 1976.

[29] M. R. Garey, R. L. Graham, and J. D. Ullman. Worst-case analysis of memory allocation algorithms. In Proc. 4th Symp. Theory of Computing (STOC), 143-150, ACM, 1973.

[30] G. Gutin, T. Jensen, A. Yeo, Batched bin packing, *Discrete Optimization*, 2, 71-82, 2005.

[31] K. Jansen, An approximation scheme for bin packing with conflicts, *Journal of Combinatorial Optimization*, 3(4), 363–377, 1999.

[32] D. S. Johnson. Near-optimal bin packing algorithms. PhD thesis, MIT, Cambridge, MA, 1973.

[33] D. S. Johnson. Fast algorithms for bin packing. *J. Comput. Syst. Sci.*, 8, 272-314, 1974.

[34] D. S. Johnson, A. Demers, J. D. Ullman, M. R. Garey, and R. L. Graham. Worst-case performance bounds for simple one-dimensional packing algorithms, *SIAM J. Comput.*, 3, 299–325, 1974.

[35] H. Kellerer and U. Pferschy. Cardinality constrained bin-packing problems, *Annals of Operations Research*, 92, 335–348, 1999.

[36] K. L. Krause, V. Y. Shen, and H. D. Schwetman. Analysis of several task-scheduling algorithms for a model of multiprogramming computer systems, *Journal of the ACM*, 22(4), 522–550, 1975.

[37] K. L. Krause, V. Y. Shen, and H. D. Schwetman. Errata: "Analysis of several task-scheduling algorithms for a model of multiprogramming computer systems", *Journal of the ACM*, 24(3), 527–527, 1977.

[38] R. Li, M. Yue, A tighter bound for FFD algorithm, *Acta Math. Appl. Sinica*, 16, 337–347, 2000.

[39] Z. Németh. A First Fit algoritmus abszolút hibájáról, TDK dolgozat, (in Hungarian). Eötvös Roland Univ., Budapest, Hungary, 2011.

[40] D. Simchi-Levi. New worst case results for the bin-packing problem, *Naval Research Logistics*, 41, 579-585, 1994.

[41] J. D. Ullman. The performance of a memory allocation algorithm. Technical Report 100, Princeton Univ., Princeton, NJ, 1971.

[42] D. P. Williamson and D. B. Shmoys. The Design of Approximation Algorithms, Cambridge University Press, 2011.

[43] W. Zhong, G. Dosa, Z. Tan, On the machine scheduling problem with job delivery coordination, *European Journal of Operational Research*, 182, 1057–1072, 2007.

[44] B. Xia and Z. Tan. Tighter bounds of the First Fit algorithm for the bin-packing problem, *Discrete Appl. Math.*, 158, 1668-1675, 2010.

[45] M. Yue, A simple proof of the inequality $FFD(L) \leq 11/9OPT(L) + 1$, $\forall L$, for the FFD bin-packing algorithm, *Acta. Math. Appl. Sinica*, 7(4), 321–331, 1991.